Recasages
- 150 red d-endom
- 154 Exp de matrice
- 204 Connexité
- 214 Inversion locale

$n \in \mathbb{N}^*$,

Lemme $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exp(\mathbb{C}[A]) = \mathbb{C}[A]^\times$

Proposition L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n \mathbb{C} \\ A & \longmapsto & \exp(A) \end{array}$ est surjective

Étapes

1. Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, montrons que $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$
2. $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$
3. Mq $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arc
4. $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$
5. Preuve du lemme
6. Preuve du théorème

① Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$, mq $\mathbb{C}[A]^\times = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$

$\mathbb{C}[A]^\times \subset \mathbb{C}[A] \cap GL_n \mathbb{C}$

Soit $M \in \mathbb{C}[A] \cap GL_n \mathbb{C}$, mq $M^{-1} \in \mathbb{C}[A]$

$$\chi_M = M^n + a_{n-1} M + \cdots + \underbrace{(-1)^n \det(M)}_{\neq 0} I_n$$

Donc
$$I_n = \underbrace{\frac{(-1)^n}{\det(M)} \left(- M^{n-1} - a_{n-1} M \cdots - a_1 \right)}_{= M^{-1} \in \mathbb{C}[M] \subset \mathbb{C}[A]} M$$

② $\exp(\mathbb{C}[A]) \subset \mathbb{C}[A]^\times$

Soit $M = \exp(P(A)) \in \exp(\mathbb{C}[A])$

$M \in \exp(\mathcal{M}_n\,\mathbb{C}) \subset Gl_n\,\mathbb{C}$

- M est limite d'éléments de $\mathbb{C}[A]$
- $\mathbb{C}[A]$ est sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc fermé
- Donc $M \in \mathbb{C}[A] \cap Gl_n\,\mathbb{C} = \mathbb{C}[A]^\times$

③ Mq $\mathbb{C}[A]^\times$ est connexe par arcs

Soient $B, C \in \mathbb{C}[A]^\times$

Posons $M : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}[A] \\ z & \longmapsto & zB + (1-z)C \end{array}$

$\det(M(X))$ est un polynome non nul car $\det(M(0)) = \det(C) \neq 0$

Soit $Z = \{ z \in \mathbb{C},\ \det(M(z)) = 0 \}$. Z est fini donc $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs

De plus $1 \in \mathbb{C}\setminus Z$ et $0 \in \mathbb{C}\setminus Z$

Donc il existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}\setminus Z$ continu tel que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$

$\forall t \in [0,1],\ \det(M\circ\gamma(t)) \neq 0$

$M\circ\gamma(t) \in \mathbb{C}[A] \cap Gl_n\,\mathbb{C}$

Donc $M\circ\gamma$ est un arc continu dans $\mathbb{C}[A]^\times$ reliant B à C

④ $\exp(\mathbb{C}[A])$ est ouvert dans $\mathbb{C}[A]^\times$

$d_0 \exp = Id$ inversible.

D'après le théorème d'inversion locale, il existe U voisinage ouvert de 0 dans $\mathbb{C}[A]$ et V voisinage de Id dans $\mathbb{C}[A]^\times$ tels que $\exp : U \longmapsto V$ est un difféomorphisme

Soit $M \in \exp(\mathbb{C}[A])$, il existe $B \in \mathbb{C}[A]$ tq $M = \exp(B)$

Notons $B + U = \{ B + C,\ C \in U \} \subset \mathbb{C}[A]$

$\exp(B+U) = \{\exp(B+C),\ C \in U \subset \mathbb{C}[A]\} \subset \exp \mathbb{C}[A]$

Les elts de $\mathbb{C}[A]$ commutent

$$= \{\exp B \exp C,\ C \in U\}$$
$$= \{MD,\ D \in V\}$$ ouvert par continuité de $D \longmapsto MD$
donc vois de M dans $\exp(\mathbb{C}[A])$

(5) Mq $\exp \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[A]^*$

Par connexité, il suffit de montrer $\exp \mathbb{C}[A]$ fermé
$\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp(\mathbb{C}[A])$ ouvert

Soit l'action de groupe $\exp \mathbb{C}[A] \times \mathbb{C}[A]^\times \longrightarrow \mathbb{C}[A]^\times$
$(\exp(M), N) \longrightarrow N\exp(M)$

$$\mathbb{C}[A]^\times = \bigcup_{N \in \mathbb{C}[A]^\times} \omega(N) \quad \text{orbites}$$

$$= \bigcup_{\substack{N \in \mathbb{C}[A] \\ N \neq Id}} N\exp(\mathbb{C}[A]) \quad \cup \exp \mathbb{C}[A]$$

Donc $\mathbb{C}[A]^\times \setminus \exp \mathbb{C}[A] = \bigcup_{\substack{N \in \mathbb{C}[A] \\ N \neq Id}} N \exp \mathbb{C}[A]$ ouverts car
$\exp \mathbb{C}[A]$ ouvert
$N \longmapsto NM$ continue

(6) $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longmapsto Gl_n(\mathbb{C})$ est surjective

Soit $A \in Gl_n \mathbb{C}$
$A \in Gl_n \mathbb{C} \cap \mathbb{C}[A] = \mathbb{C}[A]^\times = \exp(\mathbb{C}[A])$
Donc $Gl_n \mathbb{C} = \exp(\mathcal{M}_n \mathbb{C})$